ARITHMÉTIQUE

1. Mise en place

1.1. Rappels

1. On défini $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, donc $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \cdots\}$
2. Et que $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs, donc $\mathbb{Z} = \{\cdots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$
3. Il y a une infinité d'entiers naturels, et d'entiers relatifs
4. Les entiers naturels sont inclus dans les entiers relatifs $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.2. Multiple

1.2.1. Définitions

Soient n et m deux entiers relatifs.
On dit que n est un multiple de m s'il existe un entier k tel que $n = km$.
1. 0 est un multiple de tout entier relatif, car en prenant $k = 0$ on a $0 = 0 \times m$ pour tout entier m
2. un entier relatif n est toujours multiple de lui même puisque $n = 1 \times n$

Exemples :
1. 30 est un multiple de 5 car $30 = 6 \times 5$ donc ici $k = 6$
2. 150 est un multiple de 10 car $150 = 15 \times 10$, donc ici $k = 15$
3. 29 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe aucun ENTIER k tel que $29 = k \times 3$

1.2.2. Une première propriété

Soit a un entier relatif donné. La somme de deux multiples de a est alors un multiple de a.

Preuve :
En effet prenons n un multiple de a, il existe alors k entier relatif tel que $n = k \times a$.
Et si m désigne un autre multiple de a, il existe alors k' entier relatif tel que $m = k' \times a$.
Or $n + m = ak + ak' = (k + k')a$. avec $k + k'$ qui un entier relatif car c'est la somme de deux entiers, donc $n + m$ est alors un multiple de a

Exemples :
1. -300 est un multiple de 3 et 15 et un multiple de 3, donc $-300 + 15 = -285$ est aussi un multiple de 3, avec en outre $-285 = (-95) \times 3$.
2. ATTENTION: si la somme de deux entiers est un multiple de 3, cela ne veux pas forcément dire que chaque entier sera multiple de 3, en effet : $11 + 7 = 18$ or 18 est un multiple de 3, mais 11 et 7 ne le sont pas.

1.2.3. Application

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs, est nécessairement un multiple de 3.

Pour cela il faut formaliser un peu, et noter par exemple n un entier relatif donné. On a donc n, $n + 1$ et $n + 2$ qui sont bien trois entiers consécutifs et leur somme est égale à : $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$

Il existe donc bien un entier relatif k tel que n+(n+1)+(n+2) = 3k et cet entier k est k = n + 1.
On conclue bien que la somme de trois entiers consécutifs est bien un multiple de 3.

1.3. Diviseurs

1.3.1. Définitions

Soient n et m deux entiers relatifs avec m ≠ 0.
On dira que m est un diviseur de n, s'il existe un entier relatif k tel que n = k × m, c'est à dire si n est un multiple de m.
On peut aussi dire que m est un diviseur de n lorsque le quotient $\frac{n}{m}$ donne un résultat ENTIER et dans les deux cas on dira que n est divisible par m.

Dire que m est un diviseur de n revient à dire que n est un multiple de m.
Le nombre 0 a une infinité de diviseurs, puisque pour tout entier relatif NON NUL n ,$\frac{0}{n}=0$ qui est entier.
Le nombre 0 n'est le diviseur d'aucun entier relatif, puisque pour tout entier relatif n, $\frac{n}{0}$ n'a pas de sens.

Exemples :
1. −11 est un diviseur de 143 car 143 = (−13) × (−11), ou encore $\frac{143}{-11}=-13$ qui un entier.
2. 7 n'est pas un diviseur de 26 car$\frac{26}{7}$ n'est pas un entier.

Propriété :

Tout entier relatif n non nul, admet au moins 1 et lui même comme diviseur. En effet n = 1 × n.

1.3.2. Rappels - Critères de divisibilité

Un entier relatif est divisible par 2 si et seulement si le chiffre ses unités est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Un entier relatif est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4.
Un entier relatif est divisible par 5 si et seulement si le chiffre ses unités est 0 ou 5.
Un entier relatif est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

2. Nombres pairs, nombres impairs

2.1. Nombres pairs

2.1.1. Définition

On dira qu'un entier relatif n est pair lorsqu'il est un multiple de 2.
Donc si n est un entier relatif quelconque, n est pair s'il existe un entier relatif k tel que n = 2k.
Exemple : Bien sûr le nombre 5 par exemple n'est pas pair car 5 n'est pas un multiple de 2

2.1.2. Propriété

Le carré d'un nombre pair est lui aussi un nombre pair

Preuve :
Si n est un entier pair, il existe un entier k tel que $n = 2k$, donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$.
Cela signifie que $n^2 = 2 \times (2k^2) = 2k'$ avec k' un entier relatif, donc n^2 est aussi un entier pair.

2.2. Nombres impairs

2.2.1. Définition

On dira qu'un entier relatif n est impair lorsqu'il n'est pas un multiple de 2.
Donc si n est un entier relatif quelconque, n est impair s'il existe un entier relatif k tel que : $n = 2k + 1$

Exemples :
1. 17 est impair car il n'est pas divisible par 2, et en outre $17 = 2 \times 8 + 1$ donc $k = 8$
2. -35 est aussi impair est en outre $-35 = 2 \times (-18) + 1$ donc $k = -18$ ici

2.2.2. Propriété

Le carré d'un nombre impair est lui aussi un nombre impair.

Preuve :
Si n est un entier impair, il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$, donc $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k2 + 4k + 1$ en utilisant une identité remarquable. Cela signifie que $n^2 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k^2 + 2k$ un entier relatif, donc n^2 est aussi un entier impair

2.2.3. Propriétés importantes

1. lorsque l'on réuni les entiers pairs et les entiers impairs on reconstitue complètement l'ensemble de tous les entiers relatifs.
2. La somme de deux entiers pairs donne un entier pair.
3. La somme de deux entiers impairs donne un entier pair.
4. La somme d'un entier pair et d'un entier impair donne un entier impair.

2.2.4. Un exemple classique

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est nécessairement un nombre pair.
Soit n un entier relatif quelconque, son successeur est $n + 1$ et le produit s'écrit donc $n(n + 1) = n^2 + n$.
On utilise ici un raisonnement mathématique qui se nomme la DISJONCTION des cas, qui consiste à traiter tous les cas possibles :
- si n est pair : n^2 est aussi pair, donc $n^2 + n$ aussi.
- si n est impair : n^2 est impair aussi donc $n^2 + n$ donne un entier pair car la somme de deux impairs donne un entier pair.

Dans TOUS les cas, $n(n + 1)$ est un entier pair

3. Diviseurs communs de deux entiers naturels et PGCD

DANS TOUT CE QUI SUIT, NOUS NE TRAVAILLERONS QU'AVEC DES ENTIERS NATURELS.

3.1. Diviseurs communs

3.1.1. Définition

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. On dira que l'entier naturel d est un diviseur commun à n et à m lorsque d est un diviseur de n et un diviseur de m.

Exemples :
1. On donne A = 48 et B = 42.
L'ensemble des diviseurs de A est D1 = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48} L'ensemble des diviseurs de B est D2 = {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42} L'ensemble des diviseurs communs à A et à B sont les nombres entiers qui se situent à la fois dans D1 et dans D2 c'est à dire D1 ∩ D2 = {1; 2; 3; 6}.

2. On donne A = 24 et B = 35. L'ensemble des diviseurs de A est D1 = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24} L'ensemble des diviseurs de B est D2 = {1; 5; 7; 35} L'ensemble des diviseurs communs à A et à B sont les nombres entiers qui se situent à la fois dans D1 et dans D2 c'est à dire D1 ∩ D2 = {1}.

3.2. PGCD

3.2.1. Définitions

1. Le PGCD de deux entiers naturels non nuls, est le plus grand diviseur commun à ces deux entiers.
Si n et m sont deux entiers naturels non nuls, le PGCD de n et de m sera noté PGCD(n;m) ou encore $n \wedge m$
2. Lorsque PGCD(n : m) = 1, 1 est alors le seul diviseur commun à n et m, et on dira que n et m sont premiers entre eux.

Exemples :
1. On donne A = 48 et B = 42.
L'ensemble des diviseurs de A est D1 = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48} et l'ensemble des diviseurs de B est D2 = {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42} L'ensemble des diviseurs communs à A et à B sont les nombres entiers qui se situent à la fois dans D1 et dans D2 c'est à dire D1 ∩ D2 = {1; 2; 3; 6}. Le plus grand élément de cet ensemble est 6 donc PGCD(A;B) = 6

2. On donne A = 24 et B = 35. L'ensemble des diviseurs de A est D1 = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24} et l'ensemble des diviseurs de B est D2 = {1; 5; 7; 35} L'ensemble des diviseurs communs à A et à B sont les nombres entiers qui se situent à la fois dans D1 et dans D2 c'est à dire D1 ∩ D2 = {1}.
Le plus grand diviseur commun est donc 1, donc PGCD(A;B) = 1. A et B sont premiers entre eux.

4. Nombres premiers

4.1. Définition

Soit n un entier naturel non nul.
On dira que n est un entier PREMIER, s'il a EXACTEMENT deux diviseurs, 1 et lui même.
Le nombre 1 n'est donc pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur qui est lui même.

Exemples :

1. 7 est premier car il n'a que deux diviseurs 1 et 7
2. 10 n'est pas premier car il est divisible par 1; 2; 5 et 10.
3. 11 est premier car il n'est divisible que par 1 et 11
4. 2 est le seul entier pair qui est premier car il n'est divisible que par 1 et 2

4.2. Caractérisation

Un entier naturel premier ne peut pas s'écrire comme un produit de DEUX entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, donc si un entier n peut s'écrire comme un produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2, il n'est alors pas premier mais dit COMPOSÉ.

Exemples :

1. $26 = 2 \times 13$: donc 26 n'est pas premier mais composé.
2. $17 = 1 \times 17$ on ne peut pas décomposer autrement 17 par une multiplication que comme je viens de l'écrire, c'est à dire que 17 ne peut pas s'écrire comme le produit de deux ENTIERS SUPERIEURS ou égaux à 2 donc il est premier.

4.3. Test de primalité

4.3.1. Principe

Soit n un entier naturel non nul.
Si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$, alors n est premier.

Exemple :

On a $\sqrt{113} \approx 10.63$ et tous les nombres premiers inférieurs à 10.63 sont : 2; 3; 5; 7. Or 113 n'est divisible par aucun de ces derniers, donc il est premier.

4.3.2. Crible d'Ératosthène

On barre 1. 2 est le premier nombre premier. On barre tous les multiples de 2. Le plus petit nombre non barré est premier. C'est 3. On barre tous les multiples de 3. Le plus petit nombre non barré est premier. C'est 5. Et ainsi de suite. Ceux qui resteront seront tous les nombres premiers inférieurs à 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

4.3.3. Propriété

Il y a une infinité de nombre premiers.

4.4. Décomposition en produit de facteurs premiers et applications

4.4.1. Décomposition en produit de facteurs premiers

Tout entier naturel non nul et strictement supérieur à 1, peut s'écrire comme produit de nombres premiers élevés à une certaine puissance : on dira que l'on a décomposé l'entier en produit de facteurs premiers.

Exemples :
1. $100=2\times50=2\times2\times25=2\times2\times5\times5$ donc $100=2^2\times5^2$
2. $1000 = 10^3 = (2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3$
3. $60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 3 \times 2^2 \times 5$
4. 17 = 17 point puisque 17 est premier.
5. $420 = 42 \times 10 = 6 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5$ donc $420 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 5$

4.4.2. Application - Fractions irréductibles

Soients n et m deux entiers naturels non nuls. On dira que la fraction $\frac{n}{m}$ est irréductible lorsque n et m sont premiers entre eux, c'est à dire que le seul diviseur commun à n et m est 1.

Exemple : $A=\frac{100}{420}=\frac{2^2\times5^2}{2^2\times3\times7\times5}=\frac{5^2}{3\times7\times5}=5\times\frac{5}{3\times7\times5}=\frac{5}{3\times7}=\frac{5}{21}$

4.4.3. Application - PGCD

Le PGCD de deux nombres est égal au produit des termes communs à la décomposition en produit de facteurs premiers des deux nombres.

Exemple : $156 = 2^2 \times 3 \times 13$ et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ et les facteurs communs au deux décomposition sont $2^2 \times 3$.

On a donc PGCD(156;180) = $2^2 \times 3 = 12$

Exercices

Exercice 1 :
1. Déterminer les diviseurs de 18 et de 24.
2. Le nombre 102 est-il un multiple de 17 ?
3. Le nombre 24 est-il un diviseur de 4 ?

Exercice 2 :
Parmi les nombres suivants, lesquels sont divisibles par 2 ? par 3 ? par 4 ? par 5 ? par 9 ?
20 85 231 972

Exercice 3 :
Une crèche dispose de 60 dalles carrées en mousse. Elle souhaite les placer de manière à former un rectangle.
1. Quelles sont les dimensions possibles de ce rectangle ?
2. Quel est celui qui a le plus grand périmètre ?

Exercice 4 :
1. Démontrer les propriétés 2, 3 et 4 de la partie 2.2.3 Propriétés importantes.
2. Montrer que le produit de deux multiples de 2 est un multiple de 4.
3. Montrer que la somme de 4 entiers consécutifs est toujours paire.

Exercice 5 :
Soient a et a′ deux entiers impairs.
1. Montrer que $a^2 + (a')^2$ est un nombre pair
2. Montrer que a^3 est un entier impair

Exercice 6 :
1. Montrer que pour tout entier n impair, l'expression $3n^2 + 2n + 1$ est pair.

Exercice 7 :
Déterminer, en justifiant, si chacune des expressions suivantes est vraie ou fausse.
1. Tout nombre entier strictement positif a un nombre pair de diviseurs.
2. Il y a plus de nombres premiers entre 20 et 30 qu'entre 40 et 50.
3. Un diviseur d'un nombre premier est forcément premier.

Exercice 8 :
La conjecture de Goldbach affirme que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers.
1. Vérifier cette conjecture pour tous les entiers pairs compris entre 10 et 20.
2. Trouver tous les nombres premiers p et p′ tels que 100 = p + p′.

Exercice 9 : Justifier si les nombres suivants sont premiers.
1. 101 2. 103 3. 143 4. 147

Exercice 10 : Écrire sous forme irréductibles les fractions suivantes :
1. $A=\frac{60}{126}$ 2. $B=\frac{1200}{510}$ 3. $C=\frac{15}{16}+\frac{5}{32}$ 4. $D=\frac{117}{19}$

Exercice 11 :
1. Trouver tous les diviseurs premiers des nombres 21, 56, 256 et 301
2. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres A = 1260 et B = 1350, puis trouver une méthode pour donner le PGCD de A et de B
3. Donner en utilisant la méthode évoquée, le PGCD de C = 23 × 32 × 5 × 74 et de D = 22 × 33 × 72 × 11