Ensembles de nombres, intervalles réels, valeur absolue

1 Ensembles de nombres

Définition Nombres entiers naturels, relatifs, décimaux et rationnels

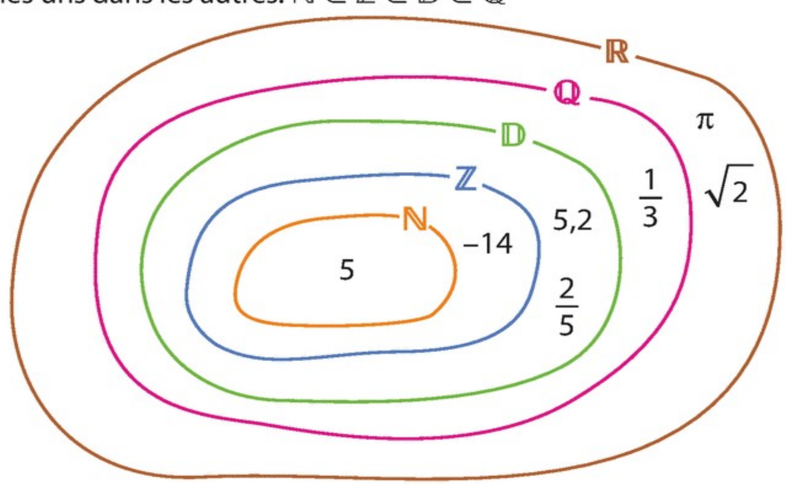
- L'ensemble des **entiers naturels**, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble des entiers positifs : $\mathbb{N} = \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;\dots\}$.
- L'ensemble des **entiers relatifs**, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble des entiers positifs ou négatifs :
$\mathbb{Z} = \{\dots\ ;-3\ ;-2\ ;-1\ ;0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;\dots\}$.
- L'ensemble des **nombres décimaux**, noté $\mathbb{D}$, est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec a un entier relatif et n un entier positif.
- L'ensemble des **nombres rationnels**, noté $\mathbb{Q}$, est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient $\dfrac{a}{b}$ avec a un entier relatif, b un entier relatif non nul.

Remarques

- Un nombre décimal a une écriture décimale finie.
- Tout entier naturel est un entier relatif, tout entier est un nombre décimal et tout nombre décimal est un nombre rationnel. Les ensembles sont inclus les uns dans les autres. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Exemples

- $5 \in \mathbb{N}$ et $5 \in \mathbb{Z}$.
- $5{,}2 = \dfrac{52}{10^1}$ donc $5{,}2 \in \mathbb{D}$ et $5{,}2 \in \mathbb{Q}$.
- $-14 \notin \mathbb{N}$ mais $-14 \in \mathbb{Z}$.
- $\dfrac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ par définition et $\dfrac{2}{5} = \dfrac{4}{10}$ donc $\dfrac{2}{5} \in \mathbb{D}$
- $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{Q}$.

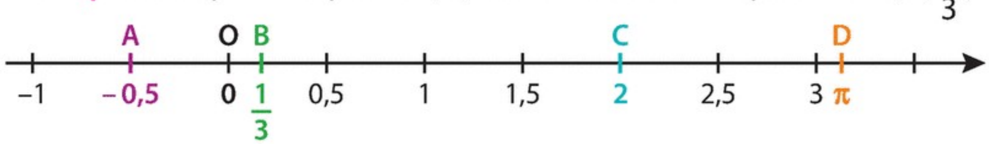


Définition Nombres réels, nombres rationnels

Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.

- L'ensemble des abscisses des points de l'axe ainsi défini s'appelle l'**ensemble des nombres réels** et se note $\mathbb{R}$. Un tel axe est appelé **droite des réels**.
- Les nombres réels qui n'appartiennent pas à l'ensemble des nombres rationnels sont appelés irrationnels.

Exemple On a placé les points A, B, C et D d'abscisses respectives $-0{,}5$; $\dfrac{1}{3}$; 2 et π.



Propriété **Nombres irrationnels**

- π est irrationnel. (Admis)
- Soit n un entier. Si n est un carré parfait alors $\sqrt{n}$ est entier, sinon $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Exemples

- $\sqrt{16} = 4$ donc $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$.
- $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Définition **Encadrement d'un réel**

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner un **encadrement décimal d'un réel x à 10^{-n}** près (ou d'amplitude 10^{-n}), c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $\boldsymbol{a \leqslant x \leqslant b}$ **et** $\boldsymbol{b - a = 10^{-n}}$.

Exemple Un encadrement de π à 10^{-3} près est $3{,}141 \leqslant \pi \leqslant 3{,}142$.

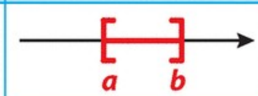
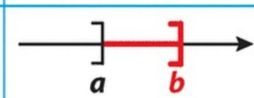
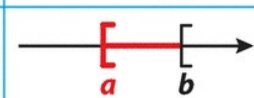
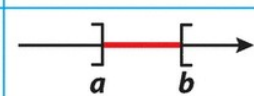
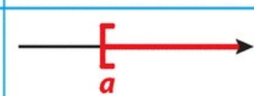
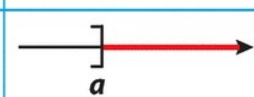
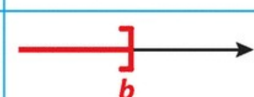
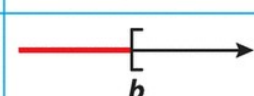
2 Intervales réels

Définition **Intervalle**

L'ensemble des nombres réels compris entre a (inclus) et b (inclus) est appelé **intervalle** et se note $[a\,;b]$.
a et b sont les **bornes** de l'intervalle.

Son **amplitude** est l'écart entre les bornes a et b et est donnée par le calcul de $b - a$.

Notation On peut définir d'autres types d'intervalles à l'aide du tableau suivant.

Ensemble de réels x tels que	Signification	Notation	Représentation
$a \leqslant x \leqslant b$	x est compris entre a inclus et b inclus	$x \in [a\,;b]$	
$a < x \leqslant b$	x est compris entre a exclu et b inclus	$x \in]a\,;b]$	
$a \leqslant x < b$	x est compris entre a inclus et b exclu	$x \in [a\,;b[$	
$a < x < b$	x est compris entre a exclu et b exclu	$x \in]a\,;b[$	
$x \geqslant a$ (ou $a \leqslant x$)	x est supérieur ou égal à a	$x \in [a\,;+\infty[$	
$x > a$ (ou $a < x$)	x est (strictement) supérieur à a	$x \in]a\,;+\infty[$	
$x \leqslant b$ (ou $b \geqslant x$)	x est inférieur ou égal à b	$x \in]-\infty\,;b]$	
$x < b$ (ou $b > x$)	x est (strictement) inférieur à b	$x \in]-\infty\,;b[$	

Remarques

- Quand le crochet est fermé (orienté vers la borne), la borne est incluse, quand il est ouvert (non orienté vers la borne), la borne est exclue.
- Le crochet est toujours ouvert en $+\infty$ et $-\infty$.
- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est $]-\infty\,;+\infty[$, celui des nombres réels positifs s'écrit $\mathbb{R}+$ ou $[0\,;+\infty[$ et celui des nombres réels négatifs s'écrit $\mathbb{R}-$ ou $]-\infty\,;0]$.

Comment lit-on ?

$-\infty$ et $+\infty$ se lisent respectivement « moins l'infini » et « plus l'infini ». $\mathbb{R}+$ se lit « $\mathbb{R}$ plus » et $\mathbb{R}-$ « $\mathbb{R}$ moins ».

Exemple

L'ensemble des nombres réels inférieurs ou égaux à 10 s'écrit $]-\infty\,;10]$.

Définitions Intersection et réunion de deux intervalles

- **L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∩ J qui contient les nombres qui appartiennent à I et à J.**
- **La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté I ∪ J qui contient les nombres qui appartiennent à I ou à J.**

Comment lit-on ?

I ∩ J se lit « I inter J » et I ∪ J se lit « I union J ».

Méthode 2 p. 75

Remarque L'ensemble des nombres réels non nuls est noté $\mathbb{R}^*$ ou $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

3 Valeur absolue

Propriété Valeur absolue et signe

Si $a \geqslant 0$, alors $|a| = a$ et, si $a \leqslant 0$, alors $|a| = -a$.

Comment lit-on ?

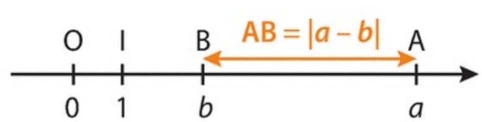
$|a|$ se lit « **valeur absolue de a** ».

Exemple

On a $|3| = 3$ et $|-2{,}8| = -(-2{,}8) = 2{,}8$.

Propriété Distance et valeur absolue

La distance entre a et b est égale à $|a-b|$.



Exemple

Sur le schéma on peut remarquer que la distance entre -1 et 7 est 8 et que $|-1-7| = |-8| = 8$.

Propriétés Intervalle, centre et rayon

Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[c-r\,;c+r]$ où c est un nombre réel et r un nombre réel strictement positif, alors on a :

$$x \in [c-r\,;c+r] \Leftrightarrow |x-c| \leqslant r.$$

Dans ce cas le nombre c est appelé centre et le nombre r rayon de l'intervalle.