Exercice 2B.1 : **Tableau à compléter - Nature d'un nombre - Ensembles de nombres**

Sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau par OUI ou NON:

Appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5					
$\frac{1}{3}$					
$\frac{3}{4}$					
$\sqrt{2}$					
$\frac{\sqrt{144}}{3}$					
π					

Exercice 2B.2 : **Nature d'un nombre**

Donner la nature des nombres suivants, sans utiliser de calculatrice:

$-\frac{84}{14}$ $\quad 5,1 \quad 10^3 \quad \frac{1,26}{18} \quad \frac{7}{21} \quad \sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}$

Exercice 2B.3 : Ne pas confondre les symboles appartient $\in$ et inclus $\subset$

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$:

a) 3 .... $\mathbb{Z}$ b) $\frac{5}{4}$ .... $\mathbb{D}$ c) $\sqrt{2}$ .... $\mathbb{Q}$

d) $\frac{1}{3}$ .... $\mathbb{D}$ e) $\mathbb{Q}$ .... $\mathbb{D}$ f) $\mathbb{N}$ .... $\mathbb{Q}$

Exercice 2B.4 : **Nature d'un nombre - Ensembles de nombres**

Sans calculatrice, donner la nature des nombres suivants:

$-5,6 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \sqrt{6,25}$

Exercice 2B.5 : Nature d'un nombre

1. $\frac{784}{3}$ appartient-il à $\mathbb{N}$?
2. $\frac{5}{1+\frac{2}{3}}$ est-il décimal?

Exercice 2B.6 : Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

Exercice 2B.7 : Démontrer que $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal

Exercice 2B.8 : Démontrer que $\frac{17}{26}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 2B.9 : Sachant que π est irrationnel, démontrer que $\frac{3}{\pi}$ et $\sqrt{\pi}$ sont irrationnels.

Exercice 2B.10 : Somme d'un rationnel et d'un irrationnel

1. Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.
2. La somme de deux irrationnels est-elle un irrationnel ?

Exercice 2B.11 :

1. Déterminer l'écriture fractionnaire égale à $2{,}111... = 2{,}\overline{1}$.
2. Déterminer l'écriture fractionnaire égale à $2{,}2323... = 2{,}\overline{23}$.
3. Déterminer l'écriture fractionnaire égale à $5{,}235695695... = 5{,}235\overline{695}$.

Exercice 2B.12 :

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Tout nombre réel est un nombre rationnel.
2. 0,5 est un nombre rationnel.
3. Le carré d'un nombre irrationnel n'est jamais rationnel.
4. Il n'existe aucun nombre réel qui ne soit pas un nombre décimal.
5. Le quotient de deux nombres décimaux non nuls est également un nombre décimal.
6. L'inverse d'un nombre décimal peut être un nombre entier.
7. Il existe deux nombres rationnels dont la somme est un nombre entier.

Exercice 2B.13 : **Algorithmique - Piège très classique - Python et les décimaux**

1. Que va afficher le programme en python ci-dessous:
```
if 0.1+0.2==0.3:
  print("titi")
else:
  print("toto")
```
2. Tester le programme sur ordinateur. Expliquer.

CORRIGE – Notre Dame de La Merci – Montpellier

Exercice 2B.1 : Tableau à compléter - Nature d'un nombre - Ensembles de nombres

Sans utiliser de calculatrice, compléter le tableau par OUI ou NON:

Appartient à	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5	NON	OUI	OUI	OUI	OUI
$\frac{1}{3}$	NON	NON	NON	OUI	OUI
$\frac{3}{4}=0,75$	NON	NON	OUI	OUI	OUI
$\sqrt{2}$	NON	NON	NON	NON	OUI
$\frac{\sqrt{144}}{3}=\frac{12}{3}=4$	OUI	OUI	OUI	OUI	OUI
π	NON	NON	NON	NON	OUI

Exercice 2B.2 : Nature d'un nombre

Donner la nature des nombres suivants, sans utiliser de calculatrice :

$-\frac{84}{14}=-6\in\mathbb{Z}$ $\qquad 5,1\in\mathbb{D}$ $\qquad 10^3=1000\in\mathbb{N}$ $\qquad \frac{1,26}{18}=0,07\in\mathbb{D}$

$\frac{7}{21}=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}\times\boxed{\sqrt{2}}}{\boxed{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{N}$

Exercice 2B.3 : Ne pas confondre les symboles appartient $\in$ et inclus $\subset$

Compléter par $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$:

$3\in\mathbb{Z}$ $\qquad \frac{5}{4}=1,25\in\mathbb{D}$ $\qquad \sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\frac{1}{3}\notin\mathbb{D}$ $\qquad \mathbb{Q}\not\subset\mathbb{D}$ $\qquad \mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$

Exercice 2B.4 : Nature d'un nombre - Ensembles de nombres

Sans calculatrice, donner la nature des nombres suivants:

$-5,6\in\mathbb{D}$ $\qquad \frac{3}{4}=0,75\in\mathbb{D}$ $\qquad \frac{4}{3}\in\mathbb{Q}$ $\qquad \frac{2}{5}=0,4\in\mathbb{D}$ $\qquad \sqrt{6,25}=2,5\in\mathbb{D}$

Exercice 2B.5 : Nature d'un nombre

1. $\frac{784}{3}=\frac{783+1}{3}=\frac{783}{3}+\frac{1}{3}=261+\frac{1}{3}\notin\mathbb{N}$

2. $\frac{5}{1+\frac{2}{3}}=\frac{5}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}=\frac{5}{\frac{5}{3}}=5\times\frac{3}{5}=3=3,0\in\mathbb{D}$.

Exercice 2B.6 : *Démontrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.*

Tout décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, $a\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{1}{3}=\frac{a}{10^n}\iff 3\times a=10^n\times 1\iff a=\frac{10^n}{3}.$$

Or $\frac{10^n}{3}$ ne peut être un nombre entier, donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 2B.7 : *Démontrer que* $\frac{9}{7}$ *n'est pas un nombre décimal*

Tout décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{9}{7} = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow 7 \times a = 10^n \times 9 \Leftrightarrow a = \frac{9 \times 10^n}{7} = \frac{3 \times 3 \times (2 \times 5)^n}{7} = \frac{3 \times 3 \times 2^n \times 5^n}{7}.$$

Or $\frac{3 \times 3 \times 2^n \times 5^n}{7}$ ne peut être un nombre entier, donc $\frac{9}{7}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 2B.8 : *Démontrer que* $\frac{17}{26}$ *n'est pas un nombre décimal.*

$$\frac{17}{26} = \frac{a}{10^n} \Leftrightarrow 26 \times a = 10^n \times 17 \Leftrightarrow a = \frac{17 \times 10^n}{26} = \frac{17 \times (2 \times 5)^n}{13 \times 2} = \frac{17 \times 2^n \times 5^n}{13 \times 2} = \frac{17 \times 2^{n-1} \times 5^n}{13}.$$

Or $\frac{17 \times 2^{n-1} \times 5^n}{13}$ ne peut être un nombre entier, donc $\frac{17}{26}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 2B.9 : *Sachant que* π *est irrationnel, démontrer que* $\frac{3}{\pi}$ *et* $\sqrt{\pi}$ *sont irrationnels.*

Raisonnons par l'absurde :

Si $\frac{3}{\pi}$ est un rationnel, on peut trouver deux entiers *a* et *b* tels que :

$$\frac{3}{\pi} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \pi \times a = 3 \times b \Leftrightarrow \pi = \frac{3b}{a}$$

→or π n'est pas un rationnel et $\frac{3b}{a}$ est un rationnel, donc $\frac{3}{\pi}$ est un irrationnel.

Si $\sqrt{\pi}$ est un rationnel, on peut trouver deux entiers *a* et *b* tels que :

$$\sqrt{\pi} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\pi}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Leftrightarrow \pi = \frac{a^2}{b^2}$$

→or π n'est pas un rationnel et $\frac{a^2}{b^2}$ est un rationnel, donc $\sqrt{\pi}$ est un irrationnel.

Exercice 2B.10 : Somme d'un rationnel et d'un irrationnel

1. *Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.*

Soit $\frac{a}{b}$ un nombre rationnel et x un nombre irrationnel.

Raisonnons par l'absurde : si $\frac{a}{b} + x$ est un rationnel, on peut trouver deux entiers *m* et *p* tels que :

$$\frac{a}{b} + x = \frac{m}{p} \Leftrightarrow x = \frac{m}{p} - \frac{a}{b} = \frac{m \times b}{p \times b} - \frac{a \times p}{b \times p} = \frac{mb - ap}{pb}.$$

Or $\frac{mb - ap}{pb}$ est un rationnel mais x est un rationnel, donc l'hypothèse est fausse et la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

2. *La somme de deux irrationnels est-elle un irrationnel ?*

Prenons un exemple simple : si l'on ajoute les deux irrationnels $\pi + 5$ et $12 - \pi$, on obtient :

$$\pi + 5 + 12 - \pi = 17.$$

La réponse est oui.

La Merci MONTPELLIER

Exercice 2B.11 :

1. *Déterminer l'écriture fractionnaire égale à* $2{,}111...=2,\overline{1}$.

Soit $x=2{,}111...=2,\overline{1}$

Alors $10x=21{,}111...=21,\overline{1}$

Ainsi $10x-x=21{,}111...-2{,}111...=21,\overline{1}-2,\overline{1}$

Soit $9x=19$

D'où $x=\dfrac{19}{9}$

2. *Déterminer l'écriture fractionnaire égale à* $2,2323...=2,\overline{23}$.

Soit $x=2,2323...=2,\overline{23}$

Alors $100x=223,2323...=223,\overline{23}$

Ainsi $100x-x=223,2323...-2,2323...=223,\overline{23}-2,\overline{23}$

Soit $99x=221$

D'où $x=\dfrac{221}{99}$

3. *Déterminer l'écriture fractionnaire égale à* $5,235695695...=5,235\overline{695}$.

Soit $x=5,235695695...=5,235\overline{695}$

Alors $1000x=5\,235,695695...=5\,235,\overline{695}$

Et $1000\,000x=5\,235\,695,695695...=5\,235\,695,\overline{695}$

Ainsi $1000\,000x-1000x=5\,235\,695,\overline{695}-5\,235,\overline{695}$

Soit $999\,000x=5\,230\,460$

D'où $x=\dfrac{5\,230\,460}{999\,000}=\dfrac{523046}{99\,900}=\dfrac{261523}{49\,950}$

Exercice 2B.12 : Algorithmique - Piège très classique - Python et les décimaux

1. Que va afficher le programme en python ci-dessous:

```
if 0.1+0.2==0.3:
  print("titi")
else:
  print("toto")
```

2. Tester le programme sur ordinateur. Expliquer.

→les valeurs décimales sont converties en base 2 et cela génère des arrondis :

Le nombre 0,1 écrit en base 2 s'écrit :

0.000 110 011 001 100 110 1

Le nombre 0,2 écrit en base 2 s'écrit :

0.001 100 110 011 001 100 11

Le nombre 0,3 écrit en base 2 s'écrit :

0.010 011 001 100 110 011 01